

Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

# Intégrales

## Cours



Programme - Compétences		
B213	MODELISER	Actions mécaniques: - modélisation locale, actions à distance et de contact - modélisation globale, torseur associé

Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

<b>A. Intégrales .....</b>	<b>3</b>
A.I.1 Intégrales sur une ligne, une surface ou un volume .....	3
A.I.1.a Préliminaires .....	3
A.I.1.a.i Notations .....	3
A.I.1.a.ii Elément d'intégration .....	3
A.I.1.a.iii Choix d'un repère .....	4
A.I.1.a.iv Bornes d'intégration .....	4
A.I.1.a.v Principe de séparation des variables .....	4
A.I.1.a.vi Calcul d'une longueur, une surface ou un volume .....	4
A.I.1.a.vii Erreur de signe .....	4
A.I.1.b Coordonnées cartésiennes .....	5
A.I.1.b.i Rappels .....	5
A.I.1.b.ii Eléments d'intégration .....	5
A.I.1.b.iii Exemples.....	6
• Surface d'un rectangle.....	6
• Surface d'un triangle .....	6
A.I.1.c Coordonnées cylindriques.....	8
A.I.1.c.i Rappels .....	8
A.I.1.c.ii Eléments d'intégration .....	8
A.I.1.c.iii Exemples .....	9
• Surface d'un demi disque .....	9
• Surface d'un cylindre .....	9
• Volume d'un cylindre.....	10
• Volume d'un cône.....	10
• Surface d'un cône .....	10
A.I.1.c.iv Remarques .....	11
• Vecteurs intégrés.....	11
• Astuce de calcul .....	12
A.I.1.d Coordonnées sphériques .....	13
A.I.1.d.i Rappels .....	13
A.I.1.d.ii Eléments d'intégration .....	13
A.I.1.d.iii Exemples.....	14
• Surface d'une sphère .....	14
• Volume d'une sphère .....	14
A.I.1.d.iv Remarques.....	14
• Vecteurs intégrés.....	14
• Astuce de calcul .....	14

Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

# A. Intégrales

## A.I.1 Intégrales sur une ligne, une surface ou un volume

Nous allons avoir besoin de calculer des intégrales sur des lignes, surfaces et volumes. Voyons donc ici les outils dont nous allons avoir besoin.

### A.I.1.a Préliminaires

#### A.I.1.a.i Notations

Dans la suite, nous noterons :

Intégrales sur une ligne $\Gamma$	Intégrales sur une surface $S$	Intégrale sur un volume $V$
$\int_{\Gamma} \vec{f} dl$	$\int_S \vec{f} dS$	$\int_V \vec{f} dV$

Ensuite, ces intégrales seront décomposées selon le domaine intégré en 1, 2 ou 3 intégrales en fonction des variables évoluant en précisant leurs bornes. Par exemple en coordonnées cartésiennes :

Intégrales sur une ligne $\Gamma$	Intégrales sur une surface $S$	Intégrale sur un volume $V$
$\int_{\Gamma} \vec{f} dl = \int_{x_1}^{x_2} \vec{f} dx$	$\int_S \vec{f} dS = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \vec{f} dx dy$	$\int_V \vec{f} dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \vec{f} dx dy dz$

#### A.I.1.a.ii Élément d'intégration

Pour calculer une intégrale, il va falloir décrire l'élément d'intégration  $dl$ ,  $dS$  ou  $dV$ . Cet élément d'intégration est une petite ligne, une petite surface ou un petit volume qu'il va falloir « déplacer » sur l'ensemble de l'élément intégré (ligne, surface ou volume) à l'aide des bornes d'intégration.

Les éléments d'intégration dépendent du système de coordonnées choisi (cartésien, cylindrique, sphérique) et du lieu d'intégration, par exemple en intégrale surfacique cylindrique, soit on intègre sur le cylindre à rayon constant, soit sur une tranche du cylindre...

Voici des exemples d'éléments d'intégration :

	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Ligne	$dl = dx$ $dl = dy$ $dl = dz$	$dl = R d\theta$ $dl = dr$ $dl = dz$	$dl = R d\psi$ $dl = R \sin \psi d\theta$ $dl = dr$
Surface	$dS = dx dy$ $dS = dx dz$ $dS = dy dz$	$dS = R d\theta dz$ $dS = r dr d\theta$ $dS = dr dz$	$dS = R^2 \sin \psi d\theta d\psi$
Volume	$dV = dx dy dz$	$dV = r dr d\theta dz$	$dV = r^2 \sin \psi dr d\theta d\psi$

Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

### A.1.1.a.iii Choix d'un repère

Avant toute intégration, il est nécessaire de poser un repère qui va définir les bornes d'intégration.

### A.1.1.a.iv Bornes d'intégration

Les bornes de l'intégrale doivent être définies de manière à décrire entièrement la ligne, la surface ou le volume où est effectuée l'intégration. Nous traiterons des exemples par la suite.

### A.1.1.a.v Principe de séparation des variables

Soit l'intégrale suivante :

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(y)h(z)dx dy dz$$

Lorsqu'il est possible d'identifier des fonctions d'une seule des variables de l'intégrale, on peut séparer les intégrations :

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(y)h(z)dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \int_{y_1}^{y_2} g(y)dy \int_{z_1}^{z_2} h(z)dz$$

### A.1.1.a.vi Calcul d'une longueur, une surface ou un volume

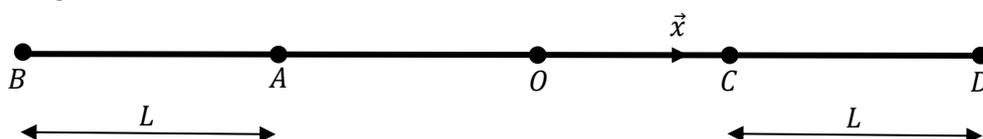
Pour calculer une longueur, une surface ou un volume, il suffit d'intégrer le nombre 1, c'est-à-dire l'élément de longueur, surface ou volume.

Longueur	Surface	Volume
$L = \int_{\Gamma} dl$	$S = \int_S dS$	$V = \int_V dV$

### A.1.1.a.vii Erreur de signe

Attention, les bornes d'une intégrale doivent être organisées de la plus petite à la plus grande.

Soit le segment  $OA$  suivant :



On a :

$$X_A - X_B = L \quad ; \quad X_D - X_C = L$$

Calculons la longueur des segments  $AB$  et  $CD$  :

$$L_{CD} = \int_{X_C}^{X_D} dx = [x]_{X_C}^{X_D} = X_D - X_C = L$$

Dernière mise à jour 23/03/2020	Indispensables	Denis DEFAUCHY
		Cours

Cette première intégrale ne nous a pas posé de soucis, C et D étant organisés de gauche à droite, une manière « habituelle » de poser le problème de gauche à droite.

Par contre, attention pour le segment  $AB$  !

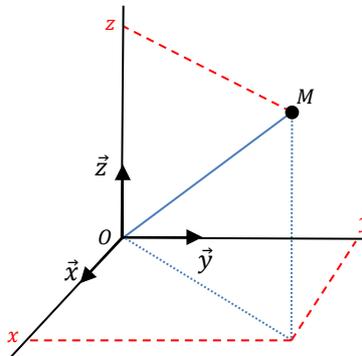
$$L_{AB} = \int_{x_B}^{x_A} dx = [x]_{x_B}^{x_A} = X_A - X_B = L$$

On voit bien qu'écrire  $\int_{x_A}^{x_B} dx$  induirait une erreur de signe.

Attention donc, ce problème est souvent source d'erreurs sur des calculs de moments en statique.

### A.I.1.b Coordonnées cartésiennes

#### A.I.1.b.i Rappels



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

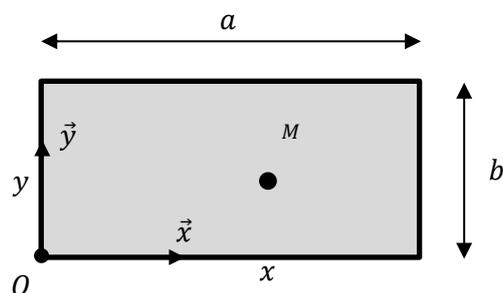
#### A.I.1.b.ii Éléments d'intégration

Longueur	Surface	Volume

Dernière mise à jour 23/03/2020	Indispensables	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	----------------	-------------------------

### A.I.1.b.iii Exemples

#### • Surface d'un rectangle

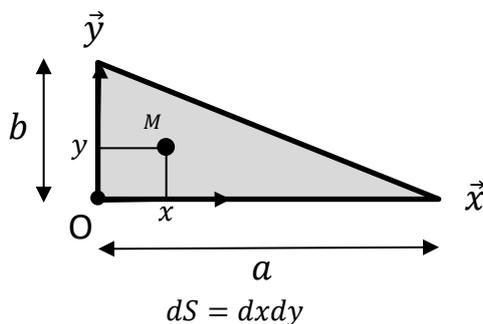


$$dS = dx dy$$

$$S = \int_S dS = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dx dy$$

$$S = \int_0^a dx \int_0^b dy = ab$$

#### • Surface d'un triangle

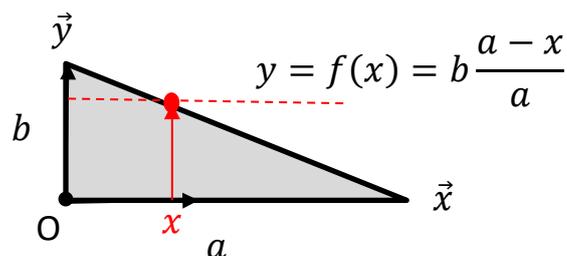


$$dS = dx dy$$

Les bornes de l'intégrale doivent permettre de promener  $dS$  sur toute la surface étudiée. On peut calculer cette intégrale de deux manières.

Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

Méthode 1 : faire varier  $x$  de 0 à  $a$  et  $y$  de 0 à ...



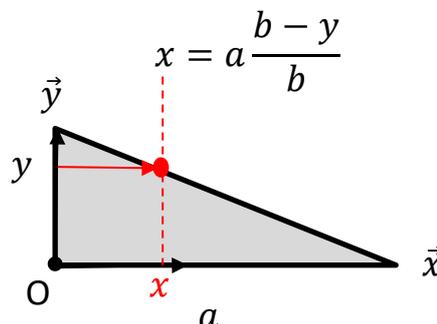
$$S = \int_S dS = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{f(x)} dx dy = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{b \frac{a-x}{a}} dx dy$$

On remarque que l'on ne peut pas procéder à cette intégrale par séparation de variable ni dans n'importe quel sens :

$$S = \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{b \frac{a-x}{a}} dy \right) dx = \int_{x=0}^a \left( [y]_0^{b \frac{a-x}{a}} \right) dx = \int_{x=0}^a b \frac{a-x}{a} dx = \frac{b}{a} \int_{x=0}^a (a-x) dx$$

$$S = \frac{b}{a} \left[ ax - \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{b}{a} \left[ aa - \frac{a^2}{2} \right]_0 = \frac{b a^2}{a 2} = \frac{ab}{2}$$

Méthode 2 : faire varier  $y$  de 0 à  $b$  et  $x$  de 0 à ...



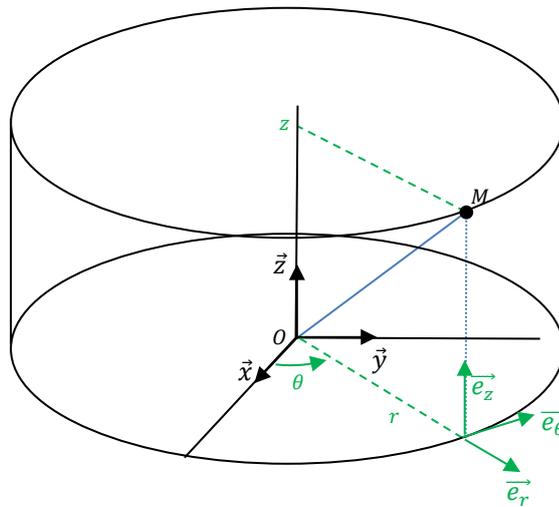
$$S = \int_S dS = \int_{y=0}^b \int_{x=0}^{a \frac{b-y}{b}} dx dy$$

$$S = \int_{y=0}^b \left( \int_{x=0}^{a \frac{b-y}{b}} dx \right) dy = \int_{y=0}^b \left( [x]_0^{a \frac{b-y}{b}} \right) dy = \int_{y=0}^b a \frac{b-y}{b} dy = \frac{a}{b} \int_{y=0}^b (b-y) dy$$

$$S = \frac{a}{b} \left[ by - \frac{y^2}{2} \right]_0^b = \frac{a}{b} \left[ b^2 - \frac{b^2}{2} \right]_0 = \frac{a b^2}{b 2} = \frac{ab}{2}$$

### A.I.1.c Coordonnées cylindriques

#### A.I.1.c.i Rappels



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

#### A.I.1.c.ii Éléments d'intégration

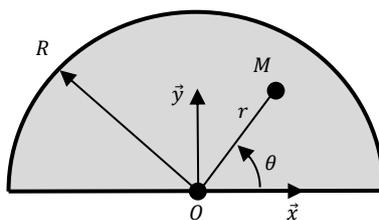
Longueur	Surface	Volume
Circonférence cylindre 	Tranche de cylindre 	
Arrête cylindre $dl = dz$ 	Surface extérieure cylindre 	

Attention :  $dS$  et  $dV$  sont positifs,  $r \in [0, R]$  uniquement

Dernière mise à jour 23/03/2020	Indispensables	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	----------------	-------------------------

### A.1.1.c.iii Exemples

#### • Surface d'un demi disque



$$dS = r dr d\theta$$

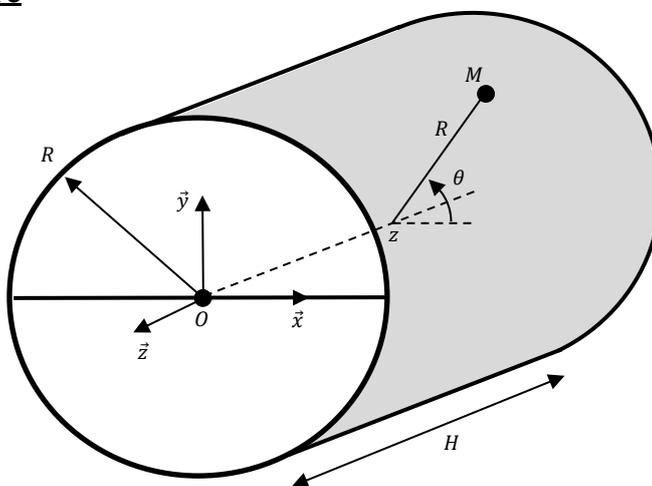
$$S = \int_S dS = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r dr d\theta$$

$$S = \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{\pi} = \frac{\pi R^2}{2}$$

Remarque : On peut calculer cette intégrale en cartésien, mais c'est à éviter

$$S = \int_S dS = \int_{x=-R}^R \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx dy = \int_{x=-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx = \dots = \frac{\pi R^2}{2}$$

#### • Surface d'un cylindre



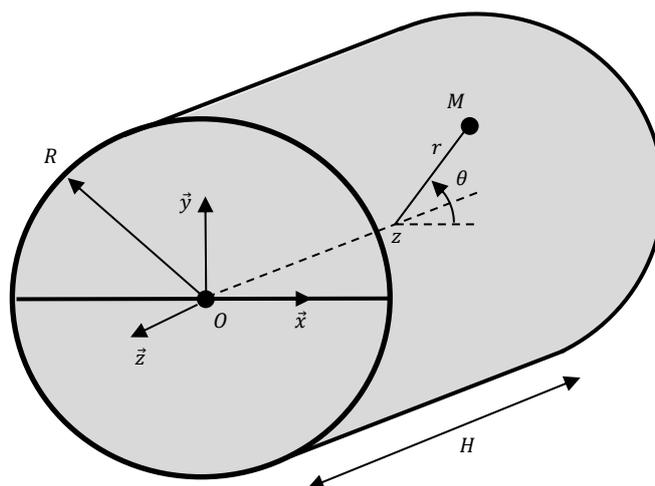
$$dS = R d\theta dz$$

$$S = \int_S dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-H}^0 R d\theta dz$$

$$S = R \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-H}^0 dz = R [\theta]_0^{2\pi} [z]_{-H}^0 = 2\pi RH$$

Dernière mise à jour 23/03/2020	Indispensables	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	----------------	-------------------------

• **Volume d'un cylindre**



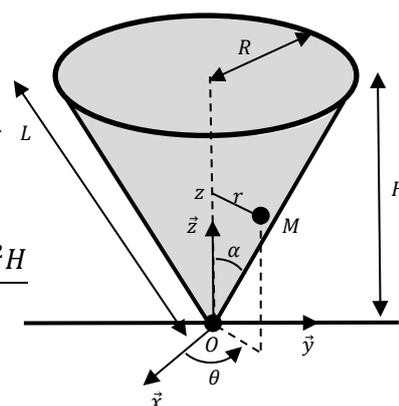
$$V = \int_V dV = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-H}^0 r dr d\theta dz$$

$$V = \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-H}^0 dz = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_{-H}^0 = \frac{2\pi R^2 H}{2} = \pi R^2 H$$

• **Volume d'un cône**

$$V = \int_V dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left( \int_{z=0}^H \left( \int_{r=0}^{f(z)} r dr \right) dz \right) ; \quad f(z) = \frac{R}{H} z$$

$$V = 2\pi \int_{z=0}^H \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{R}{H}z} dz = 2\pi \frac{R^2}{2H^2} \int_{z=0}^H z^2 dz = 2\pi \frac{R^2}{2H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$



• **Surface d'un cône**

On sait qu'elle vaut :  $\pi R \sqrt{R^2 + H^2}$ . Le calcul devient moins évident, car il faut faire une intégrale double, en exprimant proprement l'élément de longueur  $dl$  en fonction de 2 variables à choisir ( $r, \theta$ ) ou ( $z, \theta$ ). J'ai choisi ( $z, \theta$ ).

$$dS = r d\theta * dl$$

$$\cos \alpha = \frac{H}{L} = \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} = \frac{dz}{dl} ; \quad dl = dz \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H}$$

$$\tan \alpha = \frac{R}{H} = \frac{r}{z} ; \quad r = z \frac{R}{H}$$

$$dS = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H} \frac{R}{H} z d\theta dz$$

$$S = \frac{R \sqrt{R^2 + H^2}}{H^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left( \int_{z=0}^H z dz \right) = 2\pi \frac{R \sqrt{R^2 + H^2}}{H^2} \frac{H^2}{2} = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

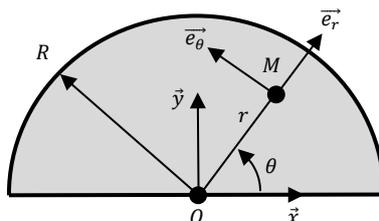
Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

### A.I.1.c.iv Remarques

#### • Vecteurs intégrés

Selon l'intégrale calculée, il peut être nécessaire d'intégrer les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ . Attention, ces vecteurs sont dépendants de  $\theta$  et ne pourront sortir de l'intégrale.

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y} \end{cases}$$



S'ils sont intégrés entre 0 et  $2\pi$ , on remarquera sans faire de calculs que le résultat donne  $\vec{0}$  (la somme de  $\vec{e}_r$  ou  $\vec{e}_\theta$  en 2 points diamétralement opposés est nulle, et ce pour tous les bipoints considérés).

Sinon, il suffit de les projeter dans une base où les vecteurs sont fixes et sortent donc de l'intégrale.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{e}_r dS &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \vec{e}_r r dr d\theta = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) r dr d\theta \\ &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} (\cos \theta) r dr d\theta \vec{x} + \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} (\sin \theta) r dr d\theta \vec{y} \\ &= \int_{r=0}^R r dr \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta d\theta \vec{x} + \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \vec{y} \right) \\ &= \frac{R^2}{2} ([\sin \theta]_0^\pi \vec{x} + [-\cos \theta]_0^\pi \vec{y}) = \frac{R^2}{2} (-[\cos \theta]_0^\pi \vec{y}) \\ &= -\frac{R^2}{2} (-2\vec{y}) = R^2 \vec{y} \end{aligned}$$

Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

Exemple 2 :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{z_1}^{z_2} \vec{e}_r R d\theta dz = R(z_2 - z_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{e}_r d\theta$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{e}_r d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \vec{x} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \vec{y}$$

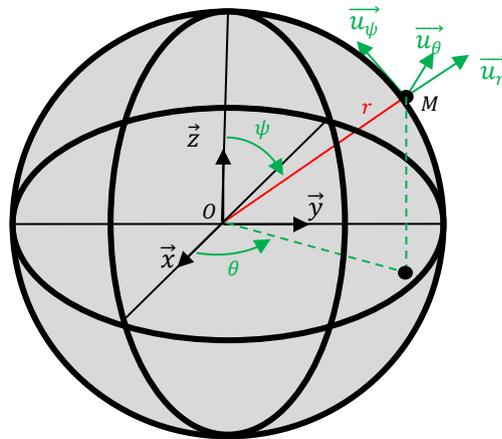
$$= [\sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{x} + [-\cos \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{y} = (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{x} + (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{y}$$

• **Astuce de calcul**

On pensera que  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$

### A.I.1.d Coordonnées sphériques

#### A.I.1.d.i Rappels

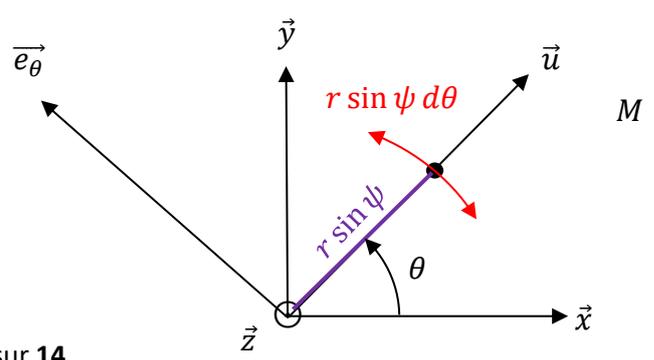
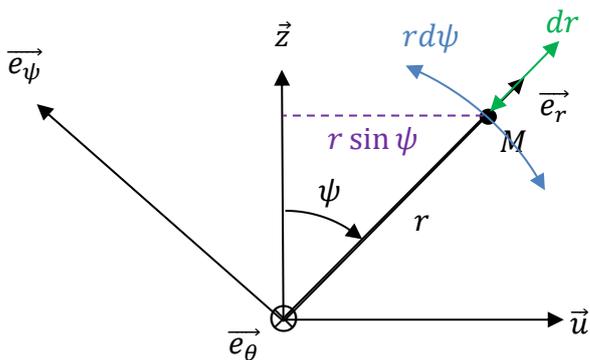


$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

#### A.I.1.d.ii Éléments d'intégration

Longueur	Surface	Volume
Peu utilisé, revient à faire du cartésien (ligne) ou cylindrique (cercles)	$dS = R^2 \sin \psi \, d\theta d\psi$	$dV = r^2 \sin \psi \, dr d\theta d\psi$
	<p style="text-align: center;"><math>R \sin \psi \, d\theta</math> <math>R \, d\psi</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>r \sin \psi \, d\theta</math> <math>r \, d\psi</math> <math>dr</math></p>

Attention :  $dS$  et  $dV$  sont positifs,  $\psi \in [0, \pi]$  uniquement



Dernière mise à jour	Indispensables	Denis DEFAUCHY
23/03/2020		Cours

### A.I.1.d.iii Exemples

#### • Surface d'une sphère

$$S = \int_S dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} R^2 \sin \psi \, d\theta d\psi$$

$$S = R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} \sin \psi \, d\psi = R^2 [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \psi]_0^{\pi} = -2\pi R^2 (\cos \pi - \cos 0) = -2\pi R^2 (-1 - 1)$$

$$S = 4\pi R^2$$

#### • Volume d'une sphère

$$V = \int_V dV = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} r^2 \sin \psi \, dr d\theta d\psi$$

$$V = \int_{r=0}^R r^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} \sin \psi \, d\psi = \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \psi]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3} 4\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

### A.I.1.d.iv Remarques

#### • Vecteurs intégrés

Comme illustré pour les intégrales cylindriques, on pourra intégrer le vecteur  $\vec{u}_r$  (éventuellement  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\psi$  mais rarement utilisés) de la représentation sphérique en prenant :

$$\vec{u}_r = \sin \psi \cos \theta \vec{x} + \sin \psi \sin \theta \vec{y} + \cos \psi \vec{z}$$

#### • Astuce de calcul

On pensera que :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$